91. Hellyノ定理ノ擴張

(阪大) 山辺 英彦

(1948. 3. 25)

次ギノ定理ハ昨春東大デ，数学談話会デ河田敬義先生ノ出サレタ予想ヲ少シ擴張シテ証明シタモノデ Helly ノ定理ニ似カヨツテヰルモノデス．

定理　N型空間Eノ中ノ部分集合M ガ dense 且ツ convex ナルトキ，Eノ上ノn個ノ linear functionals $f_1, \cdots, f_n$ ニ対シ．E ヲxニ於シテxノε近傍ニ$y \in M$ガアリ．

$$f_i(x)=f_i(y) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

ナラシメウル．

証明、　任意ノ$x \in E$ ニツキ．コトゴトクハ0デナイ n個ノ実数ノ組 κ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ニ対シテ

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i f_i(x) = const \tag{1}$$

トナラナイト仮定シテヨイ．

任意ノ $(n+1)$個ノEノ点ノ組，$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヲトルトキ．

$$\sum_{j=0}^{n} |\lambda_j| \neq 0 \qquad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0 \tag{2}$$

ナル $(n+1)$個ノ実数　λ_j $(j=0, 1, \cdots\cdots, n)$ ガ必ズ存在シ．

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_i(x_j) = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

トナルトスル．　スルト

$$\det \begin{vmatrix} f_1(x_0) & \cdots\cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_0) & & f_n(x_n) \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

トナル．故ニコトゴトクハ0デナイn個ノ実数 κ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ ガ存在シテ

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i f_i(x_j) = 0$$

コレハ(1)ニ反スル．故ニ(2).(3)ヲミタス$(n+1)$個ノ実数ノ組λ_j ($j=0, 1, \cdots, n$)ハ存在シナイ．

次ギニxノε近傍ニn個ノ点x_j ($j=1.2, \cdots, n$)ヲトリ．P, P_j ($j=1, \cdots n$)ヲn次元ユークリッド空間ノ点ト考ヘテ．

$$P=(f_1(x), \ f_2(x). \cdots\cdots \ f_n(x))$$

$$P_j=(f_1(x_j). \ f_2(x_j), \cdots\cdots, \ f_n(x_j)) \quad (j=1.2 \cdots, n)$$

ト座標ヲ対応サセル．コノP_j ($j=1, 2, \cdots, n$)及ビPハ上ノコトカラ互ニ一次独立ナラシメウル．又各x_jニ充分近クy_j（Mヲトレバf_iガ連続ナコトカラ．Pトn個ノ点 $P_j=(f_1(x_j), f_2(x_j), \cdots\cdots, f_n(x_j))$

($j=1, 2, \cdots, n$)

ヲ互ニ一次独立ナラシメウル．シカモ

$$\| y_j - x \| < \varepsilon \tag{4}$$

ニトレル，一更ニ

$$Z=(1+n\delta)x - \delta\sum_{j=1}^{n} y_j \tag{5}$$

ナル点ヲ考ヘ．δヲ充分小サクトレバ．Zハxノ$\frac{\varepsilon}{2}$近傍ニ入ル．

Zノ$\frac{\varepsilon}{2}$近傍ニ $y_0 \in M$ヲトルト

$$\| Z-x \| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \| Z-y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{カラ}$$

$$\| x-y_0 \| < \varepsilon \tag{6}$$

ヲウル．

次ギニP $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ガ一次独立故．$P_0=(f_1(y_0), \cdots\cdots, f_n(y_0))$ナル点ハ アル$n$個ノ実数組$\mu_j$ニ対シ

$$P_0=(1+n\delta+\sum_{j=1}^{n}\mu_j)P-(\sum_{j=1}^{n}(\delta+\mu_j)P_j) \tag{7}$$

デ表ハサレル．コノコトハ

$$f_i(y_0)=(1+n\delta+\sum_{j=1}^{n}\mu_j)f_i(x)-\sum_{j=1}^{i}(\delta+\mu_j)f_i(y_j) \tag{8}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$

トナルコトヲ表ハス．(8)ヨリ

$$f_i(x)=\frac{1}{1+n\delta+\sum_{k=1}^{n}\mu_k} f_i(y_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta+\mu_j}{1+\sum_{k=1}^{n}\mu_k+n\delta} f_i(y_j) \tag{9}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{1+n\delta+\sum_{k=1}^{n}\mu_k}$$

$$\alpha_j = \frac{\delta + \mu_j}{1 + n\delta + \sum_{k=1}^{n} \mu_k} \tag{10}$$

トカキ．y_0ヲ Zニ充分近クトリ．$|\mu_j| < \delta$ トナルヨウニスレバ

$$\alpha_j \geqq 0 \quad (j = 0.1. \cdots\cdots . n) \tag{11}$$

又各 f_i ガ linear デアルコトヲ用ヒテ

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_i(y_j) = f_i\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_j\right) \tag{12}$$

$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_j = \bar{y} \in M$ ヲトレバ．

$f_i(x) = f_i(\bar{y})$ 且ツ (5)．(11) ヨリ．

$\| x - \bar{y} \| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \| x - y_j \| < \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varepsilon = \varepsilon$ 即チ $\| x - \bar{y} \| < \varepsilon$

依ツテ上記ノ定理ハ証明セラレタ．